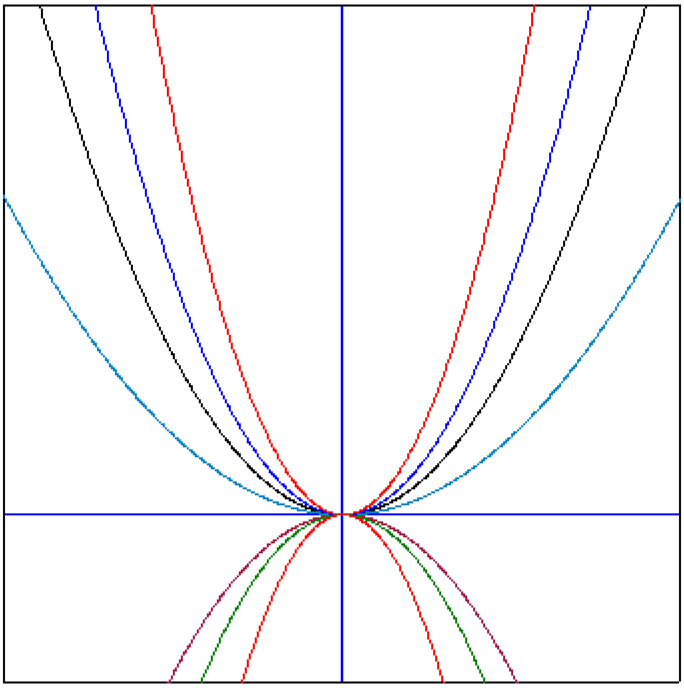
Andengradspolynomier

Teori og opgaver (hf tilvalg)



Per H. Christiansen

Dalskræntenten 50

3600 Frederikssund

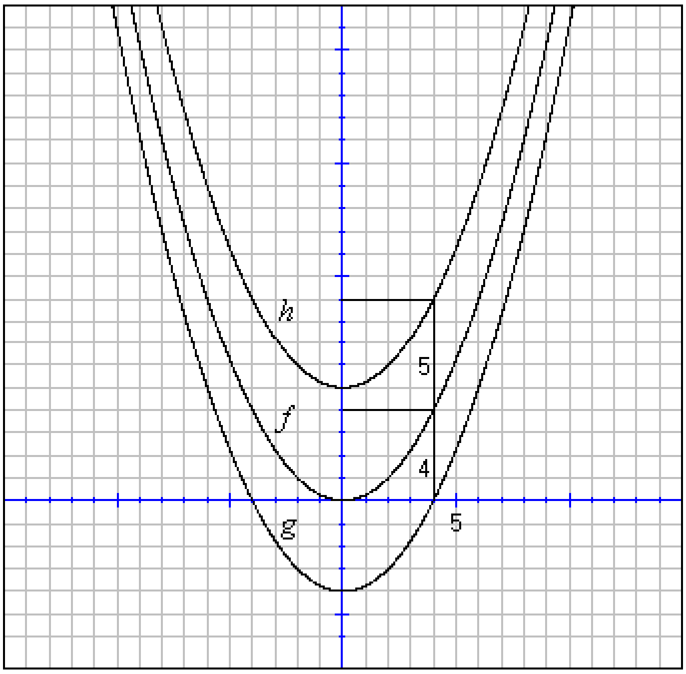
http://www.a1vbcode.com/author.asp?name=Per+H%2E+Christiansen

Andengradspolynomier

1 Forskydning af grafer

Nedenfor ses graferne for funktionerne f, g og h, givet ved:

$f(x) = \frac{1}{4} x^2$
$g(x) = \frac{1}{4} x^2 - 4$
$h(x) = \frac{1}{4} x^2 + 5$



Vi bemærker, at h(x) er 5 større end f(x) for ethvert x. F.eks. er h(4) - f(4) = 9 - 4 = 5. Vi bemærker også, at g(x) er 4 mindre end f(x) for ethvert x.

Graferne for f, g og h er med andre ord kongruente. Den eneste forskel på dem er deres forskellige placering i koordinatsystemet. Sammenfattende kan vi sige, at graferne for g og h fremkommer som forskydninger af grafen for f:

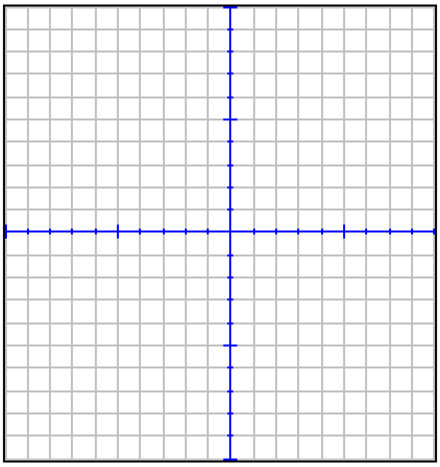
Da f(x) + 5 = h(x), får vi grafen for h ved at forskyde grafen for f 5 enheder opad langs (eller parallelt) med y-aksen. Da f(x) - 4 = g(x), får vi grafen for g ved at forskyde grafen for f 4 enheder nedad langs (eller parallelt) med y-aksen.

REGEL: *Dersom man forskyder grafen for en funktion f med t enheder langs (eller parallelt) med y-aksen, får man grafen for f(x) + t. Bemærk: Hvis t > 0, forskydes grafen opad. Hvis t < 0, forskydes grafen nedad.*

Opgave 1

Tegn grafen for f(x) = $\sqrt{x}$.
Tegn graferne for funktionerne g(x) = $\sqrt{x}$ + 4 og h(x) = $\sqrt{x}$ – 5.

Tegn grafen for m(x) = $\frac{1}{x}$.
Forskyd grafen for m (der er en såkaldt hyperbel) 3 enheder opad langs (eller parallelt) med y-aksen.
Anfør regneforskriften for den forskudte funktion.



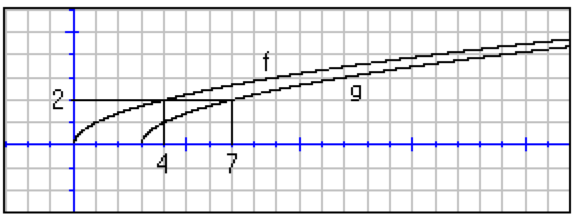
I det følgende skal vi se nogle eksempler på Forskydninger (til højre og venstre) langs (eller parallelt) med x-aksen. Vi beregner støttepunkter for funktionerne f og g, givet ved:

f(x) = $\sqrt{x}, \mathrm{Dm}(f)$ = $[0; \infty[$

g(x) = $\sqrt{x-3}, \mathrm{Dm}(g)$ = $[3; \infty[$

X	0	1	2	3	**4**	5	6
$\sqrt{x}$	0	1	1,4	1,7	**2**	2,2	2,4

X	3	4	5	6	**7**	8	9
$\sqrt{x-3}$	0	1	1,4	1,7	**2**	2,2	2,4

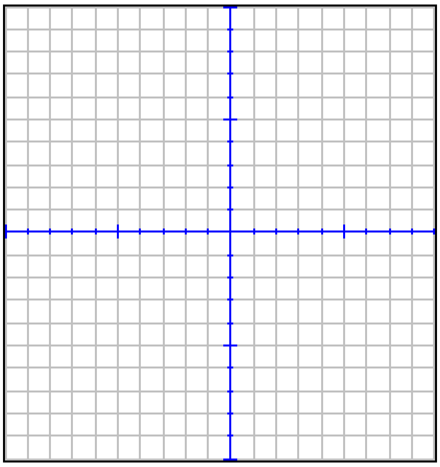


Af overensstemmelsen mellem funktionsværdierne i sildebenene (på foregående side) ses det, at graferne for f og g har samme størrelse og facon: Hver gang vi i $\sqrt{x-3}$ indsætter en x-værdi, der er 3 større end den i $\sqrt{x}$ indsatte x-værdi, får vi den samme funktionsværdi i begge funktionerne. Da g(x + 3) altså er lig med f(x) for et hvilket som helst x, fremstår grafen for g som en forskydning af grafen for f med 3 enheder til højre langs (eller parallelt) med x-aksen (se side 3 nederst).

Opgave 2

Tegn grafen for f(x) = $\sqrt{x+3}$ og bestem Dm(f).
Tegn grafen for g(x) = ¼ x^2.
Tegn også graferne for h og m, givet ved:

h(x) = ¼ $(x-4)^2$
m(x) = ¼ $(x+1)^2$



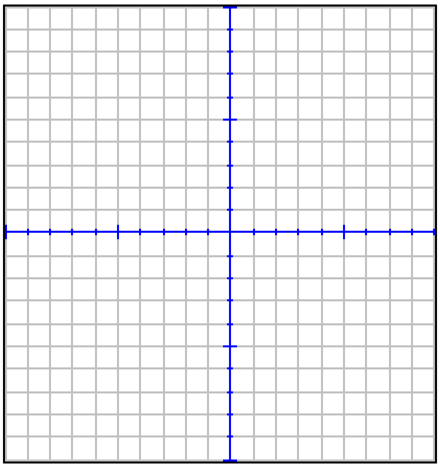
Hvordan forholder graferne sig til hinanden?

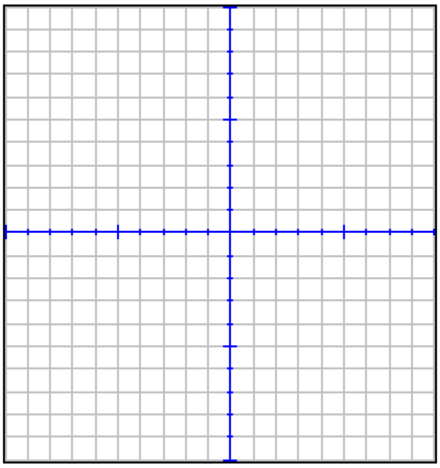
Når man f.eks. erstatter x i en funktions regneforskrift med (x - 2), forskydes den tilsvarende graf 2 enheder til højre langs (eller parallelt) med x-aksen. Omvendt forskydes grafen 2 enheder til venstre, dvs. i den stik modsatte retning, hvis x i regneforskriften erstattes af (x + 2).

Regel: Når man fra ethvert x i en grafs forskrift trækker et tal s, forskydes grafen s enheder til højre langs (parallelt) med x-aksen, dersom s > 0, og s enheder til venstre langs (parallelt) med x-aksen, dersom s < 0.

Opgave 3

Angiv forskrifterne for de 2 funktioner, der fremkommer, når grafen for f(x) = $\frac{1}{x}$ forskydes hhv. 3 enheder til højre og 2 enheder til venstre langs (parallelt) med x-aksen. Angiv de 3 funktioners definitionsmængder. Indtegn de 3 grafer i koordinatsystemet øverst til venstre på side 4.





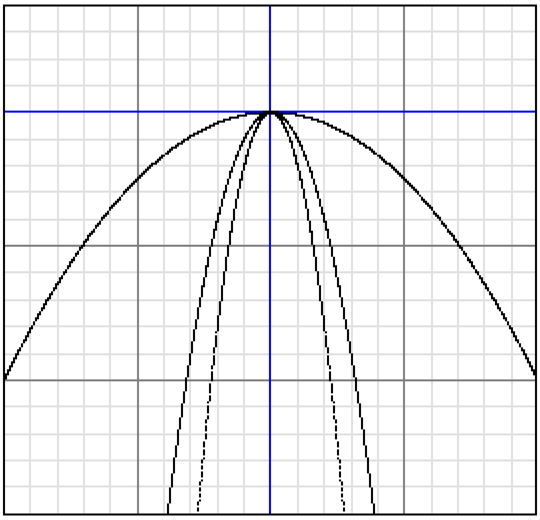
Bestem også en regneforskrift for de funktioner, som fremkommer, når grafen for $f(x) = 2x^2$ forskydes hhv. 5 enheder til venstre og 4 enheder til højre langs (parallelt) med x-aksen. Indtegn de 3 grafer i koordinatsystemet øverst til højre.

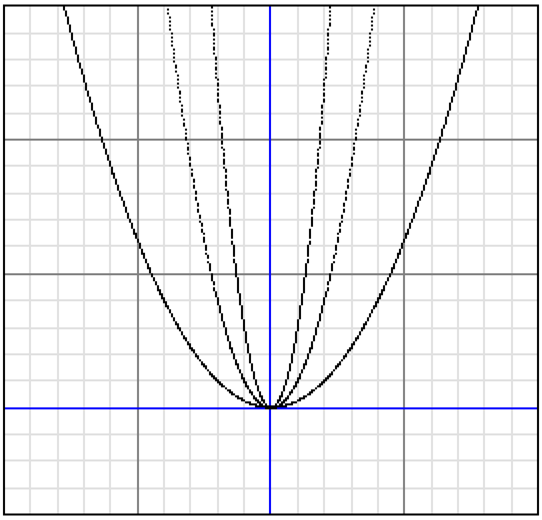
2 Andengradspolynomiets graf (parablen)

Husk: En funktion f, der har en forskrift af typen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, er et andengradspolynomium.

Andengradspolynomiets graf er en såkaldt parabel, som har ligningen: $y = ax^2 + bx + c$.





Bestem de ovenfor tegnede parablers ligninger.

Samtlige parabler (jf. s. 5 nederst) er symmetriske omkring y-aksen, da det for ethvert x gælder, at:

$f(x) = f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$.

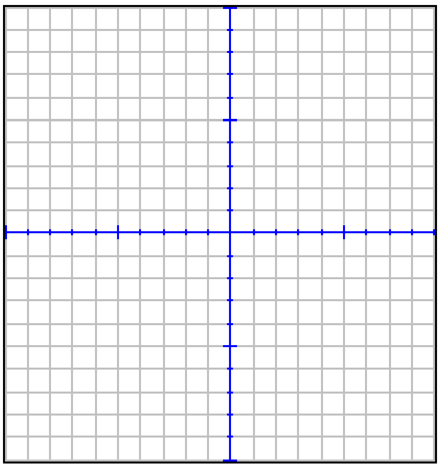
Hvis a (koefficienten til x^2) > 0, er funktionsværdien ax^2 positiv for alle $x \neq 0$, og parablens ben vender dermed opad. Er $a < 0$, er funktionsværdien negativ for samtlige $x \neq 0$, hvorfor benene vender nedad.

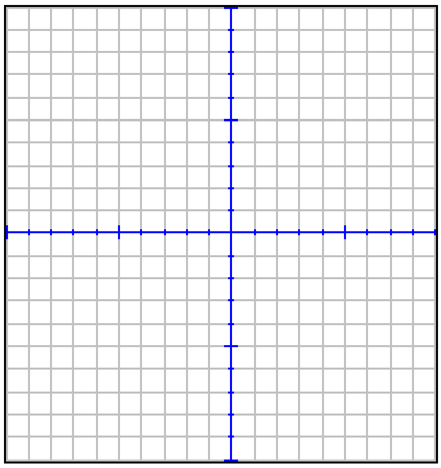
Dersom $a < 0$, har andengradspolynomiet $f(x) = ax^2$ en størsteværdi, som er andenkoordinaten i den tilsvarende parabels højeste punkt, det såkaldte toppunkt. Er $a > 0$, er parablens toppunkt dens laveste punkt, hvis andenkoordinat er funktionens mindsteværdi.

Værdien af a afgør desuden, hvor smal eller bred parablen er. For $a > 0$ gælder, at jo mindre a er, jo bredere er parablen. For $a < 0$ gælder, at jo større a er, jo bredere er parablen.

Som det vil fremgå af det følgende, er enhver parabel, bestemt ved ligningen $y = ax^2 + bx + c$, en forskydning af den enkle parabel, som har ligningen $y = ax^2$. Kender man forskrifterne for de enkle parabler, kan man uden problemer konstruere de mere komplicerede (forskudte) parabler.

Opgave 4: Tegn de parabler, hvis ligninger er bestemt ved: $y = -\frac{1}{2} x^2$, $y = \frac{1}{2} x^2$, $y = -\frac{1}{3} x^2$, $y = \frac{1}{3} x^2$.



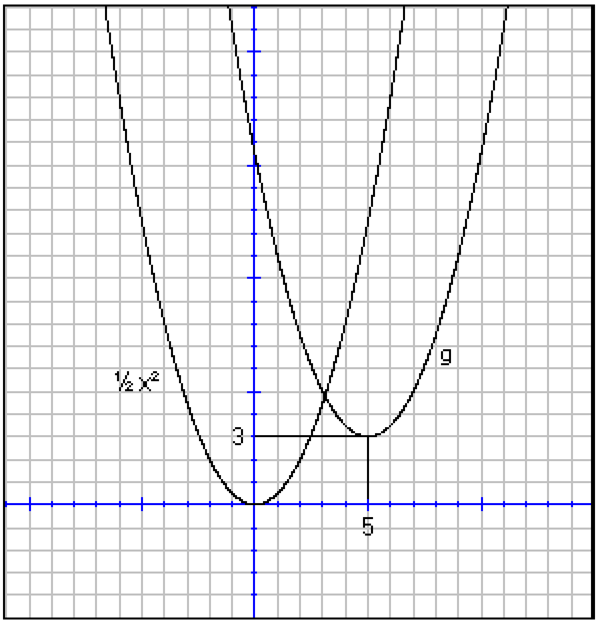


Hvis vi forskyder parablen, som har ligningen $y = \frac{1}{2} x^2$ henholdsvis 5 enheder til højre langs (parallelt) med x-aksen og 3 enheder opad langs (parallelt) med y-aksen, får vi grafen for en funktion med følgende regneforskrift:

$g(x) = \frac{1}{2} (x - 5)^2 + 3$.

$g(x) = \frac{1}{2} (x - 5)^2 + 3 \Leftrightarrow$
$g(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 10x + 25) + 3 \Leftrightarrow$
$g(x) = \frac{1}{2} x^2 - 5x + 12{,}5 + 3 \Leftrightarrow$
$g(x) = \frac{1}{2} x^2 - 5x + 15{,}5$.

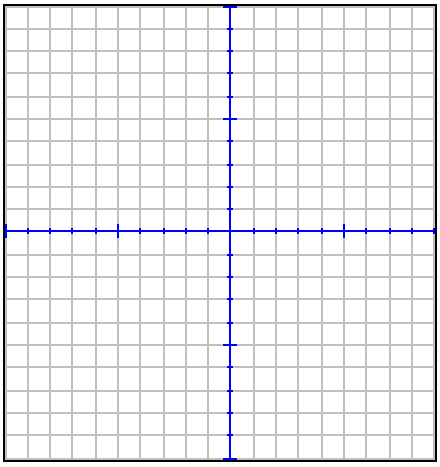
Som det ses, er g et andengradspolynomium, i hvilket a = ½, b = -5 og c = 15,5. Grafen for g er en parabel, hvis laveste punkt eller toppunkt er (5; 3):



Opgave 5

Bestem regneforskriften for den parabel, der har toppunktet (3; 5), og som er en forskydning af grafen for y = -½ x^2.

Tegn dernæst parablen, som har ligningen 1,5 x^2, og forskyd den. Vælg selv et topunkt for den forskudte parabel og angiv dennes ligning.



Forskyder vi parablen, der har ligningen $y = ax^2$, s enheder langs (parallelt) med x-aksen og t enheder langs (parallelt) med y-aksen, får vi grafen for en funktion h, der er givet ved: $h(x) = a(x - s)^2 + t$. Regner vi på denne forskrift, finder vi, at:

$h(x) = a(x - s)^2 + t \Leftrightarrow$
$h(x) = a(x^2 - 2sx + s^2) + t \Leftrightarrow$
$h(x) = ax^2 - 2asx + as^2 + t$.

Som det ses, er h et andengradspolynomium, idet $b = -2as$, og $c = as^2 + t$ (vedr. andengradspolynomiets forskrift, jf. s. 5). Polynomiets graf er en parabel med toppunktet (s; t). Som ovenstående udregning viser, kan regneudtrykket for et vilkårligt andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ omskrives til $f(x) = a(x - s)^2 + t$. Vi kan nu bestemme toppunktets koordinater s og t ved hjælp af konstanterne a, b og c:

$b = -2as \Leftrightarrow s = \frac{-b}{2a}$, som indsat i $c = as^2 + t$ giver følgende:

$c = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + t \Leftrightarrow$

$t = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$

$t = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$

$t = c - \frac{ab^2}{4a^2} \Leftrightarrow$

$t = c - \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow$

$t = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow$

$t = \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow$

$t = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Størrelsen $b^2 - 4ac$ ses i mange sammenhænge, når man beskæftiger sig med andengradspolynomier. Den betegnes med et d og kaldes diskriminanten. Dermed er $t = \frac{-d}{4a}$.

RESUME:

Hvis man forskyder parablen med ligningen $y = ax^2$, får man grafen for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvis toppunkt er givet ved:

$(s; t) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)$, idet $d = b^2 - 4ac$.

Har man glemt toppunktsformlen, kan man let rekonstruere den ved brug af differentialregning:

$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$

$f'(x) = 2ax + b.$

Hvis vi sætter f ’(x) lig 0, kan vi bestemme toppunktets første koordinat:

$2ax + b = 0 \Leftrightarrow$

$x = -\frac{b}{2a},$

som nu indsættes i den oprindelige funktion (f):

$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Leftrightarrow$

$y = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(-\frac{b^2}{2a}\right) + c \Leftrightarrow$

$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c.$

Vi forlænger ligningens andet og tredie led med henholdsvis 2 og 4a:

$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \Leftrightarrow$

$y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Leftrightarrow$

$y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Leftrightarrow$

$y = \frac{-d}{4a}$, idet diskriminanten $d = b^2 - 4ac$.

Toppunktet T er således givet ved:

$T = (x; y) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right),$

idet $d = b^2 - 4ac$.

Opgave 6

Angiv konstanterne a, b og c samt diskriminanten d for funktionerne f, g og h:

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
$g(x) = 1{,}5\ x^2 - 6$
$h(x) = -x^2 + 4$

Vil vi f.eks. tegne parablen, bestemt ved $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, beregner vi først dens toppunkt (s; t):

a = 2, b = 4, c = -6,

$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64,$

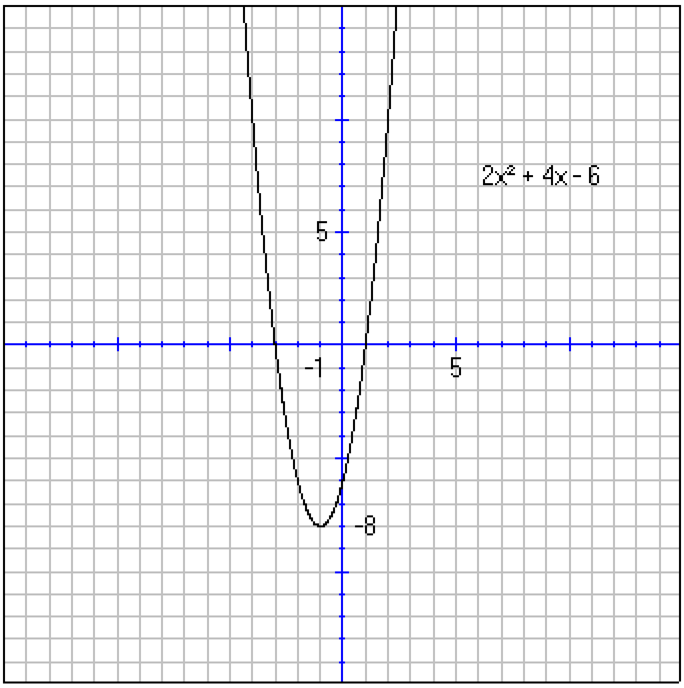
$(s; t) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{2 \cdot 2}; \frac{-64}{4 \cdot 2}\right) = (-1; -8).$

Hvis vi nu forskyder hvert af støttepunkterne for $2x^2$ 1 enhed til venstre langs (parallelt) med x-aksen og 8 enheder nedad langs (parallelt) med y-aksen, er det let at tegne grafen for $f(x) = 2x^2 + 4x – 6$:

X	0	1	2	3	4	5	6
$2x^2$	0	2	8	18	32	50	72

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

X	-1	0	1	2	3	4	5
$2x^2+4x-6$	-8	-6	0	10	24	42	64



Opgave 7

Tegn grafen for andengradspolynomierne, bestemt ved:

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$
$g(x) = x^2 - 4x - 5$
$h(x) = -\frac{1}{2} x^2 - 4x$

Hjælp: Beregn toppunktet først og anvend dernæst støttepunkter for den enkle ligning $y = ax^2$.

3 Andengradsligninger

HUSK: En andengradsligning er en ligning af typen:

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

Den enkleste andengradsligning er givet ved:

$x^2 = k, k \geq 0.$

Da $x^2 \geq 0$, har ligningen ingen løsninger, hvis $k < 0$. Man plejer at sige, at løsningsmængden i givet fald er den tomme mængde: L = Ø. Dersom $k < 0$, er $x^2 = k$ en absurditet, idet ligningens højre og venstre side så er forskellige og ikke lig med hinanden.

Er $k = 0$, har ligningen kun en løsning: $x = 0$.

Er $k > 0$, har ligningen to løsninger: $\sqrt{k}$ og $-\sqrt{k}$.

Den positive løsning $\sqrt{k}$ er det positive tal, som kvadreret, dvs. opløftet til 2. potens, giver k.

Når der også er en negativ løsning, skyldes det, at k både er lig med $\left(\sqrt{k}\right)^2$ og $\left(-\sqrt{k}\right)^2$.

Det gælder dermed, at: $x^2 = k \Leftrightarrow x = \sqrt{k}$ eller $x = -\sqrt{k}$.

Hvis f.eks. $k = 25$, er $x = 5$ eller -5, da $5^2 = (-5)^2 = 25$.

NB. I stedet for ordet eller kan man bruge tegnet v:

$x = \sqrt{k} \quad \vee \quad x = -\sqrt{k}.$

Bemærk: I mange matematikbøger anvendes formuleringen ”der gælder, at …”, men det er ukorrekt dansk, hvilket man kan forvisse sig om ved at bytte om på hoved- og bisætningen. Hvem kunne f.eks. finde på at sige eller skrive: At $f(x) = 2x^2$, der gælder? Det hedder naturligvis: At $f(x) = 2x^2$, det gælder!

Som vi tidligere har set, er grafen for andengradspolynomiet, givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$, en parabel med toppunkt i

$(s; t) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)$.

Vi har endvidere set, at $ax^2 + bx + c$ kan omskrives til $a(x - s)^2 + t$. Vi finder med andre ord, at:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow$

$a(x - s)^2 + t = 0 \Leftrightarrow$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0 \Leftrightarrow$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a} \Leftrightarrow$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}$.

Ligningens venstreside er ≥ 0. Hvis $d < 0$, bliver højresiden negativ og $L = \emptyset$. Ligningen har altså i givet fald ingen løsning(er). Grafisk viser det sig ved, at parablen hverken skærer eller berører x-aksen noget sted. Hvis $d = 0$, har andengradsligningen kun én løsning:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

Da der kun er én løsning, skærer parablen ikke x-aksen. Den berører den kun med (eller i) sit toppunkt, hvis førstekooridnat (s) med andre ord er ligningens eneste løsning. Hvis $d > 0$, er:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2$.

Når to kvadrater a^2 og b^2 er lig med hinanden, er den ene rod a = ± den anden rod b. Demed er:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{d}}{2a}$ eller $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{d}}{2a}$.

Løser vi disse ligninger finder vi, at:

$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{d}}{2a} \Leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{d}}{2a} \Leftrightarrow$ $x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$ eller

$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{d}}{2a} \Leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{d}}{2a} \Leftrightarrow$ $x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$.

En mere direkte måde at bestemme røddernes formel på er angivet i det følgende. Vi starter med at reducere ligningen $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ved at dividere igennem med koefficienten til x^2:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Før vi kan isolere x, må vi omskrive venstresiden til kvadratet på en toleddet størrelse. Vi lægger først kvadratet af det halve af koefficienten til x til på begge sider af lighedstegnet:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Venstresiden kan nu skrives således:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, idet diskriminanten $d = b^2 - 4ac$.

For $y = 0$ er $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

Hvis $d > 0$, skærer parablen med ligningen $ax^2 + bx + c$ altså førsteaksen i punkterne S_1 og S_2, givet ved:

$$S_1\left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a},\ 0\right) \quad \text{og} \quad S_2\left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a},\ 0\right).$$

RESUME:

Andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ har:

1) ingen løsninger, når $d < 0$,

2) kun én løsning, givet ved $x = \frac{-b}{2a}$, når $d = 0$,

3) to løsninger, givet ved $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$, når $d > 0$.

Hvis $a > 0$, vender parablens ben opad.
Hvis $a < 0$, vender parablens ben nedad.

Hvis eksempelvis $-2x^2 - 4x + 6 = 0$, er diskriminanten $d = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 64$.

Dermed er $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = -3 \quad \vee \quad x = 1$.

Løs andengradsligningerne:

$2x^2 + x - 3 = 0$
$7x^2 - 3x + 5 = 0$
$-x^2 - 5x - 6 = 0$
$2(x - 1)(x + 4) = 0$
$-x^2 - 4x + 5 = 0$
$2(x - 2)(x + 1) = 0$
$(5x - 1)^2 - 56 = (2x + 1)^2$
$(x - ½)^2 - 5 = -(x + ½)^2$.

Når det blæser, føles luften koldere, end den gør i vindstille vejr. Jo hurtigere det blæser, jo hurtigere afkøles det tynde lag af varm luft, kroppen løbende danner omkring sig, for at opretholde en normal legemstemperatur (37° C). Når det f.eks. fryser 5 grader, og vinden samtidig blæser 14 m/sek., mister kroppen lige så meget varme, som hvis den blev udsat for 15 graders kulde i vindstille vejr. Forholdet mellem varmtab, temperatur og vindhastighed er givet ved den såkaldte

Windchilleffekt = $13{,}3 + 0{,}62 \cdot T - 13{,}95 \cdot V^{0,16} + 0{,}486 \cdot T \cdot V^{0,16}$,

hvor T er temperaturen i celsiusgrader og V er vindhastigheden i meter i sekundet.

Bestem windchilleffekten, når det fryser 20 grader, og vinden blæser med en hastighed på 18 m/sek.
Bestem vindhastigheden, når windchilleffekten er -21°, og temperaturen er -10°.

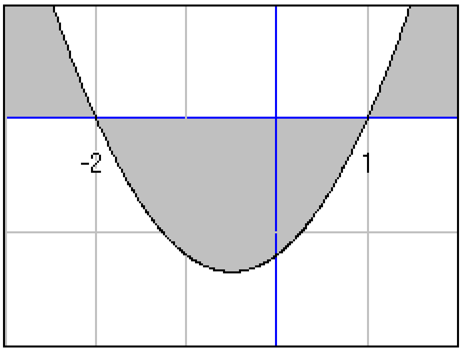
4 Andengradsuligheder

Indsætter man i en andengradsligning ($ax^2 + bx + c = 0$) et ulighedstegn (>, ≥, <, ≤) i stedet for lighedstegnet, får man en såkaldt andengradsulighed, der løses på følgende måde:

Først løser man andengradsligningen ($ax^2 + bx + c = 0$). Siden vurderer man, hvordan parablen med ligningen $y = ax^2 + bx + c$ er placeret i koordinatsystemet. Her følger nogle eksempler:

$3x^2 + 3x - 6 < 0$.
$3x^2 + 3x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 1$

Da a i ligningen er 3 og dermed større end 0, vender parablens ben opad. Desuden skærer den x-aksen to steder: i punkterne (-2; 0) og (1; 0). Vi kan med andre ord konkludere, at den ser nogenlunde således ud:



Som det fremgår af tegningen, er funktionsværdien negativ (< 0) for ethvert x mellem -2 og 1. Uligheden $3x^2 + 3x - 6 < 0$ har med andre ord løsningsmængden L =]-2; 1[.

Skal man kun finde eventuelle rødder (og ikke toppunktet) i en andengradsligning, kan man gøre sådan:

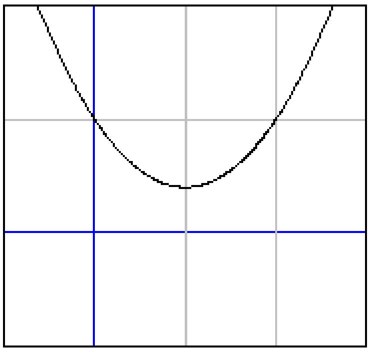
$3x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + x = 2 \Leftrightarrow$
$x^2 + x + (½)^2 = 2 + (½)^2 \Leftrightarrow$
$(x + ½)^2 = 2{,}25 \Leftrightarrow$
$x + ½ = \pm\sqrt{2{,}25} \Leftrightarrow$
$x = -½ \pm 1{,}5 \Leftrightarrow$
$x = 1 \ \vee \ x = -2$.

Bliver tallet under kvadratrodstegnet negativt, er der ingen rødder. Se endvidere disse eksempler:

$3x^2 + 3x - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = [-2; 1]$
$3x^2 + 3x - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad L =]-\infty; -2[\cup]1; \infty[$
$3x^2 + 3x - 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad L =]-\infty; -2] \cup [1; \infty[$.

Vi løser nu uligheden: $3x^2 - 6x + 5 > 0$.

$3x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow L = \emptyset$, da diskriminanten $(d = b^2 - 4ac) = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -24$



Eftersom parablens ben vender opad, og den ikke skærer/berører x-aksen (se ovenfor), er samtlige funktionsværdier positive. Da $f(x) > 0$ for ethvert $x \in R$, er $L = R$. Løsningsmængden (L), der tilfredsstiller uligheden $3x^2 - 6x + 5 > 0$, er med andre ord alle de reelle tal (R).

Vi finder endvidere, at:

$3x^2 - 6x + 5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \emptyset$
$3x^2 - 6x + 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \emptyset$
$3x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = R$.

Opgave 8

Løs ulighederne:

$6x^2 - 5x + 1 \leq 0$
$5x^2 - 11x - 12 > 0$
$4x^2 + 15x + 9 < 0$

$2x^2 - 7x + 8 < 0$
$3x^2 + 4x - 7 \geq 0$
$5x^2 - x + 1 > 2 - x^2$
$2x^2 - 5x + 1 < x + 1$.

Nyttige formler, forskrifter, beviser og definitioner

Andengradsligning:

$ax^2 + bx + c = 0$ eller

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ for $d \geq 0$.

Diskriminanten $d = b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$

Toppunktet $T = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)$.

Overalt ovenfor er $a \neq 0$.

Andengradspolynomium:

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Andengradspolynomiets graf (parablen) har ligningen:

$y = ax^2 + bx + c$.

Overalt ovenfor er $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Hvis $b = 0$, og a og c har samme fortegn, er der ingen rødder.

Eksempel:

$2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 = -8 : 2 \Leftrightarrow X^2 = -4$.

Ligningen har ingen rødder, da man ikke kan uddrage kvadratroden af et negativt tal.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

Hvis b = 0, og a og c har forskellige fortegn,

er der 2 rødder: $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ og $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Eksempel:

$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 = 8 : 2 = 4 \Leftrightarrow$
$x = 2 \;\; v \;\; x = -2.$

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

Hvis b = 0 og c = 0, er der kun èn (dobbelt-) rod, som er lig med 0.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

Hvis $b \neq 0$, og c = 0,

er der 2 rødder: $\frac{-b}{a}$ og 0.

Eksempel:

$4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow$
$x(4x - 8) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \;\; v \;\; x = 2.$

I den (efter faldende potenser ordnede og) reducerede andengradsligning

$x^2 + ax + b = 0$, hvor der med andre ord er divideret igennem med koefficienten til x^2, så denne er 1,

er $x = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\frac{(-a)^2}{4} - b}$, dersom $\frac{(-a)^2}{4} - b \geq 0$.

Det kan formuleres sådan: I den (efter faldende potenser ordnede og) reducerede andengradsligning, er x lig med det halve af koefficienten til x med modsat fortegn (-a/2) plus/minus kvadratroden af samme tal (-a/2) i anden fulgt af ligningens sidste led (b) med modsat fortegn.

I den reducerede andengradsligning

$x^2 + ax + b = 0$, hvor $d \geq 0$, er:

$a = -(x_1 + x_2)$ = summen af rødderne med modsat fortegn og

$b = x_1 \cdot x_2$ = røddernes produkt.

Endelig er

$x_1 = -a - x_2$ og

$x_2 = -a - x_1$.

Det kan bevises, at:

$x_1 + x_2 = -a$ og

$x_1 \cdot x_2 = b$:

Den ubekendte x_1 kaldes y, og den ubekendte x_2 kaldes x:

Ligning 1: $y + x = -a \Leftrightarrow y = -x - a$.

Ligning 2: $y \cdot x = b \Leftrightarrow y = b : x,\ x \neq 0$.

$-x - a = b : x \Leftrightarrow$
$x + a = -b : x \Leftrightarrow$
$x(x + a) = -b \Leftrightarrow$
$x^2 + ax = -b \Leftrightarrow$
$x^2 + ax + b = 0$.

Hermed har vi den oprindelige, reducerede andengradsligning.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.

Hvis c = 0, kan rødderne findes som vist i dette eksempel:

$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0$.

Løsning 1: $x = 0 : (x + 2) \Leftrightarrow x = 0$.

Løsning 2: $x + 2 = 0 : x \Leftrightarrow x = -2$.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

I andengradsligninger, hvor $c \neq 0$, og hvor c og rødderne kendes, kan a og b bestemmes på denne måde:

Eksempel: $c = 4$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Efter reduktion af ligningen, er

1) a altid 1,

2) $b = -(x_1 + x_2) = -(-4 + 1) = 3$,

3) $c = (x_1 \cdot x_2) = -4 \cdot 1 = -4$.

Efter reduktion hedder ligningen altså:

$x^2 + 3x - 4 = 0$.

Men da c = 4 i den ikke reducerede ligning, ganges der igennem med -1:

$-1x^2 - 3x + 4 = 0$.

Det vil sige, at i den oprindelige (ikke reducerede) ligning, er $a = -1$ og $b = -3$.

Kvadratet på en toleddet størrelse er lig med kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus eller minus det dobbelte produkt (af de to led):

Eksempel: $(x - 5) \cdot (x - 5) = (x - 5)^2 =$

Kvadratet på en toleddet størrelse =

$x^2 + 25 - 10x = x^2 - 10x + 25$.

Differencen mellem to tals kvadrater er lig med de to tals sum gange de samme to tals differens:

Eksempel: $(x^2 - 25)$.

De to tal er x og 5. Dermed er $(x^2 - 25) = (x + 5) \cdot (x - 5)$.

Bevis: $(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 5x + 5x - 25 = x^2 - 25$.

Ligninger af typen

$(x + 5) \cdot (x - 5) = 0$

har 2 løsninger:

1) $x + 5 = \frac{0}{x - 5} \Leftrightarrow x = -5.$

2) $x - 5 = \frac{0}{x + 5} \Leftrightarrow x = 5.$

Andengradsligninger kan ofte løses ved hjælp af faktorisering:

Eksempel 1:

$2x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$(x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$(x + 2)^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$(x + 2)^2 = 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+2)^2} = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$x + 2 = \pm 1 \Leftrightarrow$
$x = -2 \pm 1 \Leftrightarrow$
$x = -1 \lor x = -3.$

I den reducerede ligning $x^2 + 4x + 3 = 0$ er $x_1 + x_2 = -a$.

Dermed er:

$-1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow$
$x_2 = -4 + 1 = -3.$

Eksempel 2:

$-2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$(x + 1)(x - 2) = 0.$

Dermed er

$x_1 = -1$ og $x_2 = 2.$

Supplerende opgaver

Opgave 9

Bestem regneforskriften for den funktion, der fremkommer, når grafen for

a) $f(x) = 2x^2$ forskydes 3 enheder til venstre langs (parallelt) med x-aksen,
b) $g(x) = ¼\, x^2$ forskydes 6 enheder til højre langs (parallelt) med x-aksen,
c) $h(x) = -7x^2$ forskydes 5 enheder opad langs (parallelt) med y-aksen,
d) $j(x) = -x^2$ forskydes 2 enheder til højre langs med x-aksen og 1 enhed nedad langs med y-aksen.

Opgave 10

Tegn grafen for

a) $f(x) = (¼)^x$
b) $g(x) = (¼)^{x-2}$
c) $h(x) = (¼)^x - 5$
c) $h(x) = (¼)^{x+3} + 1$

Opgave 11

Bestem regneforskriften g for den graf, der fremkommer, når grafen for $f(x) = ½\, x + 2$ forskydes 2 enheder til højre langs med x-aksen og 3 enheder nedad langs med y-aksen. Bestem også s og t i formlen $g(x) = a(x - s) + t$.

Opgave 12

Tegn grafen for hver af disse funktioner

a) $f(x) = -x^2$
b) $g(x) = -x^2 + 3$
c) $h(x) = -(x - 1)^2$
d) $k(x) = -(x - 1)^2 + 5$

Opgave 13

Tegn i et koordinatsystem graferne for disse funktioner:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
b) $g(x) = -2x^2 - 4x - 6$
c) $h(x) = -2x^2 + 4x – 6$
d) $j(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Opgave 14

Bestem toppunktet og tegn parablerne.

a) $y = x^2 - 6x - 7$
b) $y = x^2 + 2x - 15$
c) $y = x^2 - 7x + 12$
d) $y = x^2 + 4x + 5$

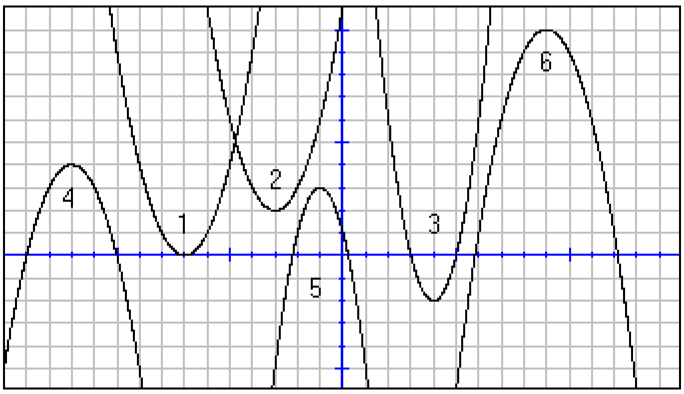
Opgave 15

Bestem symmetriakse og toppunkt for hver af parablerne og tegn disse.

a) $y = -x^2 - 5x - 4$
b) $y = -x^2 - 4x + 5$
c) $y = x^2 + 7x + 6$
d) $y = -x^2 + 4x + 5$
e) $y = 2x^2 - 2x - 4$
f) $y = 3x^2 + 6x + 3$
g) $y = x^2 - 2x - 3$

Opgave 16

Angiv fortegnet for a, b, c og d i hver af disse parablers ligninger.



Opgave 17

Parablen med ligningen $y = 2x^2 + bx + c$ har topunktet $(3, \frac{b}{4})$. Bestem b og c.

Opgave 18

En parabel går gennem punkterne (3, 0), (5, 12) og (-2, 5). Bestem parablens ligning.

Opgave 19

Bestem a i ligningen $x^2 - (a + 5)x + 5a = 0$, så denne kun har en løsning.

Opgave 20

a) $x^2 - 2x - 35 = 0$
b) $(3x - 3)(x + 2) = 0$
c) $(-2x - 4)(x + 1) = 0$
d) $(5x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 56$
e) $(x - ½)^2 + (x + ½)^2 = 5$
f) $2x^2 - 2x - 4$
g) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 240$

Opgave 21

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$

b) $\frac{4}{x+1} + \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x+3}$

c) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2} - 3$

Opgave 22

I en retvinklet trekant er hypotenusen 1 cm længere end længste katete og 8 cm længere end den korteste. Vis, at trekantens omkreds er 30 cm.

Opgave 23

Bestem en andengradsligning, der har rødderne:

a) $-1\frac{1}{3}$ og 6

b) $3\frac{1}{3}$ og 15

c) $1\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$

d) $-1\frac{3}{4}$ og 8

Opgave 24

Tegn parablerne givet ved $y = 1¼\, x^2 - 3½\, x - 36¾$ og $y = (-½\, x + 3½)^2$, og bestem deres skæringspunkter.

Opgave 25

Bestem hvor de parallelle linjer, givet ved

a) $y = 2x - 2$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = 2x - 14$
d) $y = 2x - 5$

skærer parablen, der har ligningen $y = -x^2 + 4x + 1$.

Opgave 26

Tegn parablen, der har ligningen $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2 - 7$. Linien l_a er givet ved $y = -x - a$, idet a er et reelt tal. For hvilke værdier af a skærer linjen parablen henholdsvis to steder, kun ét sted og ingen steder?

Opgave 27

Løs ulighederne:

a) $2x^2 - 5x + 1 < x + 2$

b) $5x^2 - x + 1 > -x^2 + 2$

c) $\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} < 1$

d) $\frac{x + 1}{x^2 - \frac{1}{2}} > 4$

e) $\frac{2x^2 - 7}{5x - 1} > 2$

f) $x + 7 \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Opgave 28

Tegn i samme koordinatsystem graferne for funktionerne

$f(x) = x - 1$ og $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Skravér de områder i koordinatsystemet, for hvilket det gælder, at $f(x) > g(x)$.

Opgave 29

Bestem mænden af reelle tal a, for hvilke det gælder, at uligheden $ax^2 + 4x - 5 > 0$ ikke har nogen løsninger.